Класс: 10
Тема урока: Решение иррациональных неравенств.

Тип урока: урок- практикум
Цели:
Образовательная:
Формирование самообразовательной компетентности: повторить формулы, относящиеся к данной теме, систематизировать материал данной темы. Формирование интеллектуальной, познавательной компетентности: проверить умения и навыки решения заданий по теме.
Развивающая:
Формирование познавательной, интеллектуальной компетентности, расширить умственный кругозор учащихся.
Воспитательная:
Способствовать развитию творческой деятельности, потребности к самообразованию.
Методы: метод мини- проектов

Форма работы: Работа в группах (класс предварительно был разбит на четыре группы).
Оборудование: компьютер, экран, проектор для показа презентаций, раздаточный материал по теме урока.

План урока:
1. Организационный момент.
2. Актуализация знаний и умений учащихся, необходимых при изучении данной темы.
3. Повторение и анализ основных методов. Просмотр компьютерных презентаций, подготовленных учащимися, в программе Power Point.
4. Решение иррациональных неравенств и их систем.
5. Дополнительные исторические сведения
6. Итог урока.
7. Домашнее задание.

Ход урока
I. Организационный этап. Сообщение темы урока, цели урока.
Учитель: Эпиграфом нашего урока являются слова Микеланджело: «Если бы люди знали, как много я тружусь, чтобы добиться мастерства, они перестали бы считать меня таким уж талантливым».
Задания для каждой группы: Подготовить презентацию своего мини- проекта на тему: «Решение иррациональных неравенств».

II. Актуализация знаний и умений учащихся

1 задание
Учитель задает вопросы классу:
1) Какие неравенства называются иррациональными? (первая группа учащихся)
2) Какие утверждения нужно знать и использовать при решении иррациональных неравенств методом возведения в степень? (вторая группа учащихся)
3) Приведите основные соотношения, применяемые для решения систем иррациональных неравенств? (третья группа учащихся)
4) Где применяются решения иррациональных неравенств (четвертая группа учащихся).

2 задание

Какая группа быстрее заполнит таблицу

«Простейшие иррациональные неравенства»:

	$\sqrt{x} < a$	$\sqrt{x} > a$
$a < 0$	решений нет	$x \geq 0, x \in [0;+\infty)$
$a = 0$	решений нет	$x > 0, x \in (0;+\infty)$
$a > 0$	$x < a^2, x \in [0;a^2)$	$x > a^2, x \in (a^2;+\infty)$

$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$
равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2 x \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	равносильно системам $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ или $g(x) \geq 0$ $f(x) > g^2(x)$	равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

III. Подготовка учащихся к обобщающей деятельности (повторение и анализ основных методов)

Учитель: Решение иррациональных неравенств осложняется тем обстоятельством, что здесь, как правило, исключена возможность проверки, поэтому необходимо выполнять равносильные преобразования.

Основным методом решения иррациональных неравенств является сведение исходного неравенства к решению равносильного ему рационального неравенства, либо к равносильной системе или совокупности систем рациональных неравенств.

Вспомним основные виды и методы решений иррациональных неравенств.

3 задание

Группы защищают свои мини- проекты (презентации с видами неравенств).

Первая группа

Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} < a, n \in N$

- при $a \leq 0$ не имеет решений;
- при $a > 0$ равносильно неравенству $0 \leq f(x) < a^{2n}$.

Пример 1. Решить неравенство. $\sqrt{1-x} < -4$

Решение. Правая часть этого неравенства отрицательна, в то время как левая часть неотрицательна при всех значениях *x*, при которых она определена. Поэтому неравенство решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{2x-3} < 1$.

Решение. Запишем равносильную ему систему рациональных неравенств

$$\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\frac{3}{2};2\right)$.

Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} > a, n \in N$

- при $a < 0$ равносильно неравенству $f(x) \geq 0$;
- при $a \geq 0$ равносильно неравенству $f(x) > a^{2n}$.

Пример 1. Решить неравенство. $\sqrt{3x-9} > -10$

Решение. Как и в предыдущем примере, заметим, что правая часть данного неравенства отрицательна, а левая часть исходного неравенства неотрицательна при всех значениях *x*, при которых она определена. Это означает, что левая часть больше правой части при всех значениях *x*, удовлетворяющих условию $x \geq 3$.

Ответ: $[3;+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{4x-3} > 1$.

Решение. Это неравенство равносильно неравенству

$4x-3 > 1^2$.

Ответ: $x > 1$.

Вторая группа

Неравенство вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} < a, n \in N$ равносильно неравенству $f(x) < a^{2n+1}$.

Неравенство вида $\sqrt[2+1n]{f(x)} \geq a, n \in N$ равносильно неравенству $f(x) \geq a^{2n+1}$.

Пример. Решите неравенство $\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 6} < 2$

Решение. Возведя обе части исходного неравенства в третью степень, получим равносильное неравенство $x^4 + x^2 + 6 < 8$. Решим полученное рациональное неравенство: $x^4 + x^2 - 2 < 0$, $(x^4 - 1) + (x^2 - 1) < 0$, $(x^2 - 1)(x^2 + 2) < 0$, $x^2 - 1 < 0$, $x^2 < 1$, $|x| < 1$, $-1 < x < 1$.

Ответ: (-1;1)

Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} \leq \sqrt[2n]{g(x)}$, где $n \in N$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in N$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример. Решите неравенство $\sqrt[4]{x^2 + 2} > \sqrt[4]{3 - x}$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$\begin{cases} x^2 + 2 > 3 - x, \\ 3 - x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ x \leq 3 \end{cases}$ Система равносильна совокупности двух систем

$\begin{cases} x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ x \leq 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ x \leq 3 \end{cases}$

Ответ: $(\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 3)$

Третья группа

Неравенство вида $\sqrt[2n+1]{\boldsymbol{f(x)}} \leq \sqrt[2n+1]{\boldsymbol{g(x)}}$, где $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ равносильно неравенству $\boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{g(x)}$.

Неравенство вида $\sqrt[2n+1]{\boldsymbol{f(x)}} > \sqrt[2n+1]{\boldsymbol{g(x)}}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ равносильно неравенству $\boldsymbol{f(x)} > g(x)$.

В частности неравенство вида $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} \geq \sqrt[3]{\boldsymbol{g(x)}}$, при возведении обеих частей в шестую степень равносильно неравенству $f^3(x) \geq g^2(x)$, а неравенство $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} \leq \sqrt[3]{\boldsymbol{g(x)}}$ равносильно системе $\begin{cases} f^3(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Пример. Решите неравенство $\sqrt[3]{2-4x} - \sqrt{2x-1} \geq 0$.

Решение. $\sqrt[3]{2-4x} \geq \sqrt{2x-1}$. Возведем обе части неравенства в шестую степень. Получим

$$\begin{cases} 4(1-2x)^2 \geq (2x-1)^3 \\ 2x-1 \geq 0; \end{cases}, \begin{cases} (2x-1)^2(4-2x+1) \geq 0, \\ x \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} (2x-1)^2(5-2x) \geq 0, \\ x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$. *Ответ*: $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$

Четвертая группа

Неравенство вида $\sqrt[2n]{\boldsymbol{f(x)}} < g(x)$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Пример. Решите неравенство $\sqrt{x+18} < 2-x$.

Решение. Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x+18 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+18 < (2-x)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18, \\ x \leq 2, \\ x^2 - 5x - 14 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x < 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 7, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Ответ: $[-18; -2)$.

Неравенство вида $\sqrt[2n]{\boldsymbol{f(x)}} \geq \boldsymbol{g(x)}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x^2+x-2\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x^2+x-2>x^2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x\ge 1,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x>2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$.

IV. *Задание 4.* Решение иррациональных неравенств.

Совместная работа учителя и учащихся при разборе решений иррациональных неравенств.

Задача 1. Неравенство вида ***f(x)*** $\sqrt{g(x)}\ge 0$ равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)=0,\\ f(x)-\text{определено}\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример. Решите неравенство $(x^2-9)\sqrt{x+2}\ge 0.$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-9\ge 0,\\ x+2\ge 0,\end{cases}\\ x+2=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 9,\\ x\ge -2,\end{cases}\\ x=-2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\ge 3,\\ x\ge -2,\end{cases}\\ x=-2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x\ge 3,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2\}\cup[3;\infty)$

Задача 2. Решить неравенство вида $\sqrt{2x-a}>x-2$

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2\ge 0,\\ 2x-a>(x-2)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x-2<0,\\ 2x-a\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ \ge 2,\\ x^2-6x+4+a<0,\end{cases} & 1\\ \begin{cases}x<2,\\ x\ge \dfrac{a}{2},\end{cases}; & 2\end{array}\right.$$

Очевидно, что при a <4 множество решений системы (2) промежуток $[\frac{a}{2};2)$, при a≥4 система (2) решений не имеет. Корни квадратного трехчлена $x^2-6x+4+a$ $x_{1,2}=3\pm\sqrt{5-a}$ существуют при a ≤5, поэтому при a ≥5 неравенство $x^2-6x+4+a<0$, а, следовательно, и система (1) решений не имеют. При a<5 множество решений неравенства $x^2-6x+4+a<0$ интервал $(x_1,x_2)=(3-\sqrt{5-a},3+\sqrt{5-a})$. Множество решений системы (1) $x_1=(3-\sqrt{5-a},3+\sqrt{5-a})\cap[2,+\infty)$. $x_1\neq 0$, так как $x_2=3+\sqrt{5-a}>2.$ Выясним взаимное расположение точек $x_1=3-\sqrt{5-a}$ и x=2.

Решаем уравнение

$3-\sqrt{5-a}=2 \Leftrightarrow \sqrt{5-a}=1 \Leftrightarrow 5-a=1,$

Получим а=4. При $a<4$ $x_1<2$, поэтому $x_1=[2;3+\sqrt{5-a})$, при $a\in[4;5)$ $x_1\geq 2$, поэтому $x_1=(x_1, x_2)$.

Объединяя решения систем (1) и (2), окончательно имеем:

Ответ:

$x\in[\frac{a}{2};2)\cup\left[2;3+\sqrt{5-a}\right)=\left[\frac{a}{2};3+\sqrt{5-a}\right)$ при $a<4$; $x\in\left(3-\sqrt{5-a};3+\sqrt{5-a}\right)$ при $a\in[4;5)$; 0 при $a\geq 5$

V. Дополнительные сведения для учащихся.

В начале XVI столетия несколько итальянских математиков (Сципион дель Ферро, Николай Тарталья, Иероним Кардан) научились решать уравнения третьей степени. В учебнике по алгебре, который издан Карданом в 1545 году под названием «Великое искусство в вопросах алгебры», по существу, уже содержалось формула для корней уравнения третьей степени. Иероним Кардан, один из самых отважных искателей и бесспорно самый искусный астролог своего времени; Иероним Кардан, если верить легенде о его смерти, ставший мучеником своей веры в астрологию, оставил после себя способ вычисления, посредством которого каждый может предвидеть счастье или несчастье на каждый год своей жизни, Он основывает свою теорию на собственных опытах и уверяет, что это вычисление никогда его не обманывало. Чтобы узнать, какова будет судьба какого-нибудь года, он резюмирует события, предшествовавших ему годов по 4, 8, 12, 19 и 30; 4 – число реализаций; 8 – Венеры или вещей естественных; 12 – число цикла Юпитера, соответствует успехам; числу 19 соответствуют циклы Луны и Марса; 30 – число Сатурна, или фатальности.

VI. Подведение итогов урока

VII. Домашнее задание. Решение примеров №168(2,4), №170(6)